

Auf den „Orlando Furioso“ kommt er aber in folgenden Versen zurück, wobei er ausdrücklich das in seinem an Seemann gerichteten Brief erwähnte Postulat vom Siege der Tugend anführt:

*Man höre doch, wie die aus Erz gezwungne Sayten
Der Freude neue Krafft, der Qvaal ein Grab bereiten.
Bald klagt Angelica der mitleyd-vollen Lufft,
Daß sie oft den Medor doch fruchtloß hat gerufft;
Bald weint Angelica, daß sie voll Blut und Wunden
Das, was sie sehnlich liebt, halb lebloß hat gefunden.
Bald qvällt die Eyfersucht der Bradamante Brust,
Bald küsset sie Ruggier mit innig-süßer Lust.
Alcina klagt den Schmertz den Wäldern und den Steinen,
Und Philomela hilfft bey ihrem Schicksal weinen.
Orlando fällt zuletzt aus Lieb und Raserey,
Und klagt, daß falsche List der Weiber Zierath sey;
Doch muß bey dem Beschluß zu allerseits Vergnüen
Der Tugend reines Gold bey Sturm und Wellen siegen.*

Graf Sporck hat für die Musikgeschichte seines Landes mehr getan als irgendein anderer Aristokrat seiner Zeit. Diese Zeilen sollen die Erinnerung an eine Zeit wachrufen, die in der Pflege der Kunst die wichtigste Aufgabe des Mächtigen sah.

Das Harmonische Feld des gleichschwebend temperierten Tonsystems

VON GEORG KRÖNER, ESSLINGEN AM NECKAR

Das Harmonische Feld

Bild I. Wir ordnen in einem Schema die Töne des gleichschwebend temperierten Tonsystems (GtS) so an, daß die harmonischen Beziehungen der Töne deutlich hervortreten, und nennen die dabei sich ergebende Anordnung das Harmonische Feld (HF) des GtS.

In Bild I haben wir einen von As bis gis⁴ reichenden Ausschnitt aus dem HF. Wir entnehmen ihm, daß alle Töne auf geradlinigen Reihen von harmonischen Intervallen (Oktaven, Quinten, Quartan, Terzen, Sexten, Dezimen, Undezimen, Duodezimen) liegen und daß in dem durch diese Reihen gebildeten Geflecht jeder Ton ein Knotenpunkt mehrerer harmonischer Intervallreihen ist.

Die Punktsymmetrie des Harmonischen Feldes

Der Ton d¹ ist der Mittelpunkt des Ausschnitts; um ihn gruppieren sich alle Töne punktsymmetrisch. Die drei einen Durdreiklang bildenden Töne C, E, G sind in bezug auf d¹ punktsymmetrisch zu den drei einen Molldreiklang bildenden Tönen e³, c³, a². Durch Punktspiegelung wird also aus dem Dur — aufwärts — Dreiklang C E G der Moll — abwärts — Dreiklang e³ c³ a². Diese gleichzeitige Vertauschung von Geschlecht (Dur und Moll) und Richtung (aufwärts und abwärts) tritt, wie das HF zeigt, bei Punktspiegelung immer ein, auch wenn wir an die Stelle von d¹ einen anderen Punkt als Spiegelzentrum setzen. Die doppelte Umkehrung von Geschlecht und Richtung ist die Grundeigenschaft der Punktspiegelung im HF.

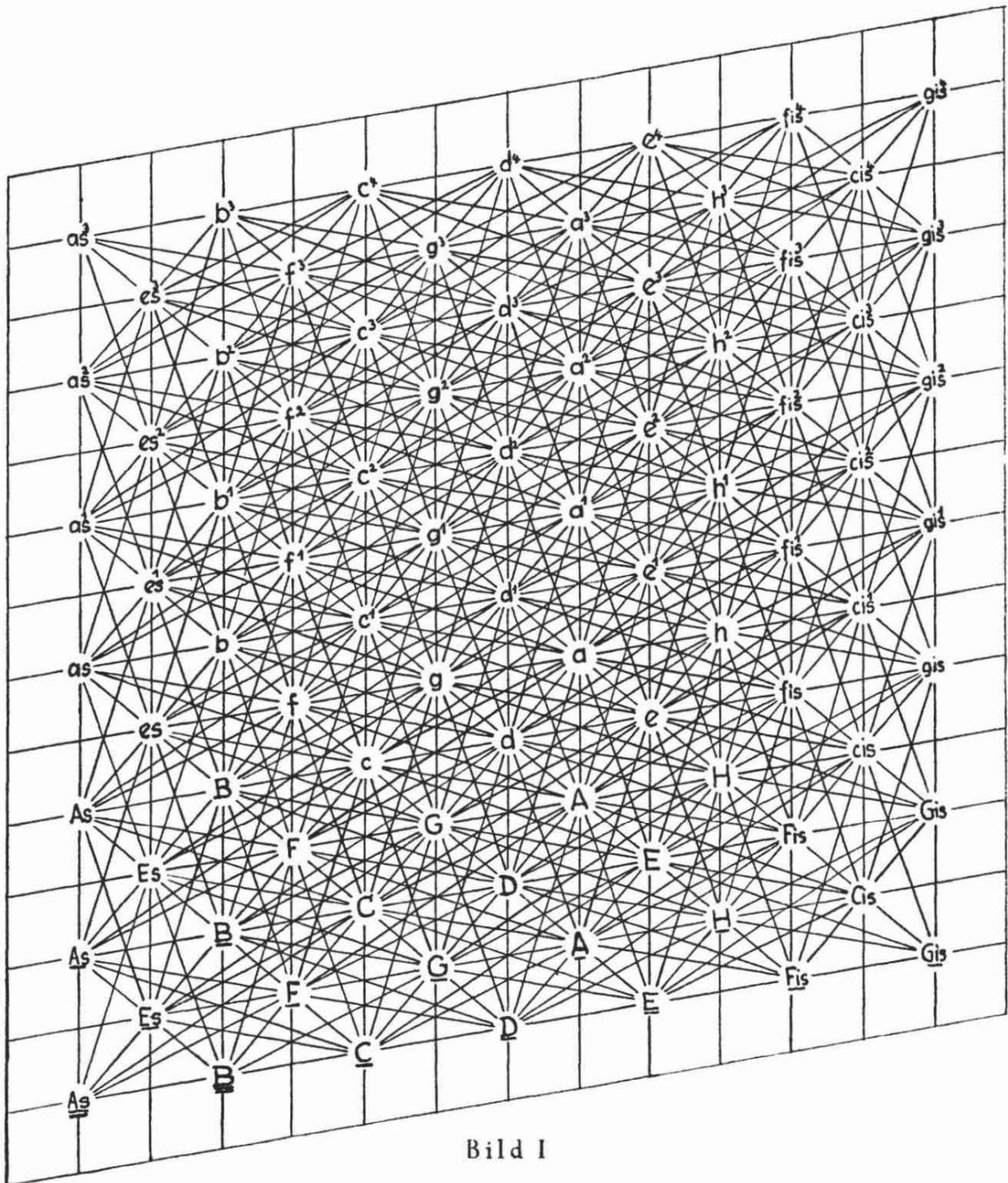


Bild I

Bilden wir sämtliche in bezug auf d^1 punktsymmetrische Tonpaare auf die Tastatur des Klaviers ab, dann sind alle diese Tastenpaare symmetrisch in bezug auf die d^1 -Taste des Klaviers. Die Punktsymmetrie des HF und die Tastensymmetrie der Klaviertastatur bringen die gleiche Grundtatsache zum Ausdruck, nämlich die Symmetrie des Tonnamensystems in bezug auf den Ton d.

Beispiel 1

A-Dur (3#)

c-moll (3b)

Tonleiter

— Halbtöne

Beispiel 2

b-moll (5b)

H-Dur (5#)

Dreiklang

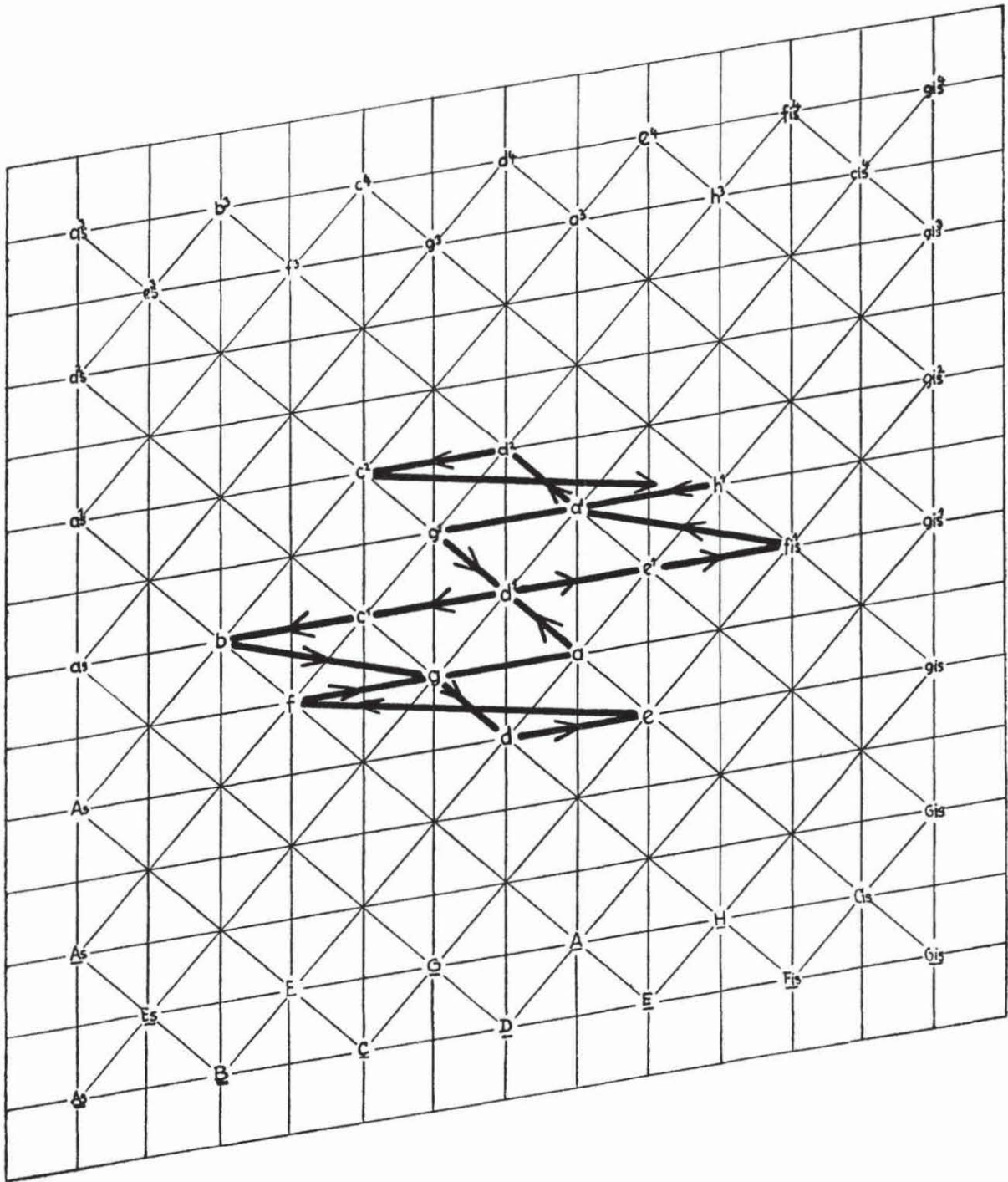


Bild II

Notenbeispiele 1 und 2. Das ist musikalisch so auszudrücken: Jeder musikalische Zusammenhang (beispw. Tonleiter, Dreiklang) ergibt im Spiegelbild und in das andere Tongeschlecht versetzt auf der Klaviertastatur das entsprechende Bild. Dabei ist für eine \sharp -Vorzeichnung die der Spiegelbild-Tonart entsprechende b -Vorzeichnung zu setzen. Hierbei ist Hugo Riemanns dualistische Theorie zugrunde gelegt, wonach der Grundton der Dur-Leiter die Tonika, der der (natürlichen oder aeolischen) Moll-Leiter der Dominantton ist.

Wird der Ausschnitt des HF nach allen Seiten hin bis ins Unendliche erweitert, dann erhalten wir das vollständige HF. Dieses ist offenbar in sich punktsymmetrisch in bezug auf jeden darin vorkommenden Ton.

Die Punktspiegelung von Melodien

Bild II. Eine Melodie ist eine Folge von Tönen. Bilden wir diese Tonfolge im HF ab, dann entsteht, wenn wir die in der Melodie aufeinanderfolgenden Töne miteinander verbinden, ein Streckenzug. Spiegeln wir diesen an einem beliebigen Ton des HF, dann erhalten wir einen neuen, zweiten Streckenzug, der nun wieder als Melodie gedeutet werden kann. Wir können also auf diese Weise zu jeder Melodie eine zweite Melodie erhalten.

Beispiel 3

:
 Melodie

Anm.: Hier ergibt sich die bekannte melodische Entsprechung von Dur und Phrygisch, (axial, bzw. hier auch) punktsymmetrisch gespiegelt.

Notenbeispiel 3. Die zwei Melodien unterscheiden sich, da sie an allen entsprechenden Stellen punktsymmetrisch sind, wegen der Grundeigenschaft der Punktsymmetrie so, daß Richtung und Geschlecht überall vertauscht sind. Die zweite Melodie ist, wegen der vertauschten Richtungen, in der Ausdrucksweise der Zwölftonmusik, die Umkehrung der ersten. Wird die Spiegelung an einem Ton d vorgenommen, dann sind die zwei Melodien auf dem Klavier tastensymmetrisch. Stellt ein Klavierspieler neben seinem Klavier einen Spiegel auf und spielt mit der rechten Hand die erste Melodie, dann spielt sein Spiegelbild mit der linken Hand die dazu tastensymmetrische zweite Melodie.

Die Achsensymmetrie des Harmonischen Feldes Der Durklang der 6 ersten musikalischen Obertöne

Bild III. Wir tragen im linken unteren Teil des HF 6 Töne ein, deren Schwingungszahlen im reinen Tonsystem im Verhältnis $2:3:4:5:6:8$ stehen, indem wir an die Stelle der Tonnamen diese Verhältniszahlen setzen. Die 6 Töne sind in bezug auf einen Grundton mit der Schwingungszahl 1 Obertöne und bilden im Hinblick auf diesen Grundton einen Durklang. Da von dem Oberton mit der Verhältniszahl 7 in der Musik kein Gebrauch gemacht wird, so sind unsere 6 Töne die 6 ersten musikalischen Töne der Obertonreihe und bilden daher den Durklang der 6 ersten musikalischen Obertöne.

Die Achsenspiegelung an der Ganztonachse

Diesen Durklang spiegeln wir nun Ton um Ton an der Ganztonachse (GTA) as — gis ¹ des HF und erhalten so eine zur ersten Tongruppe kongruente zweite Tongruppe. Die Töne dieser Gruppe haben, wegen der Kongruenz, das gleiche Verhältnis der Schwingungszahlen wie die der ersten und ergeben deshalb den gleichen, nur um 4 Oktaven höher liegenden Durklang der 6 ersten musikalischen Obertöne. Die Spiegelung an der GTA bewirkt also bei unserem Sechsklang keine Veränderung des Klangcharakters.

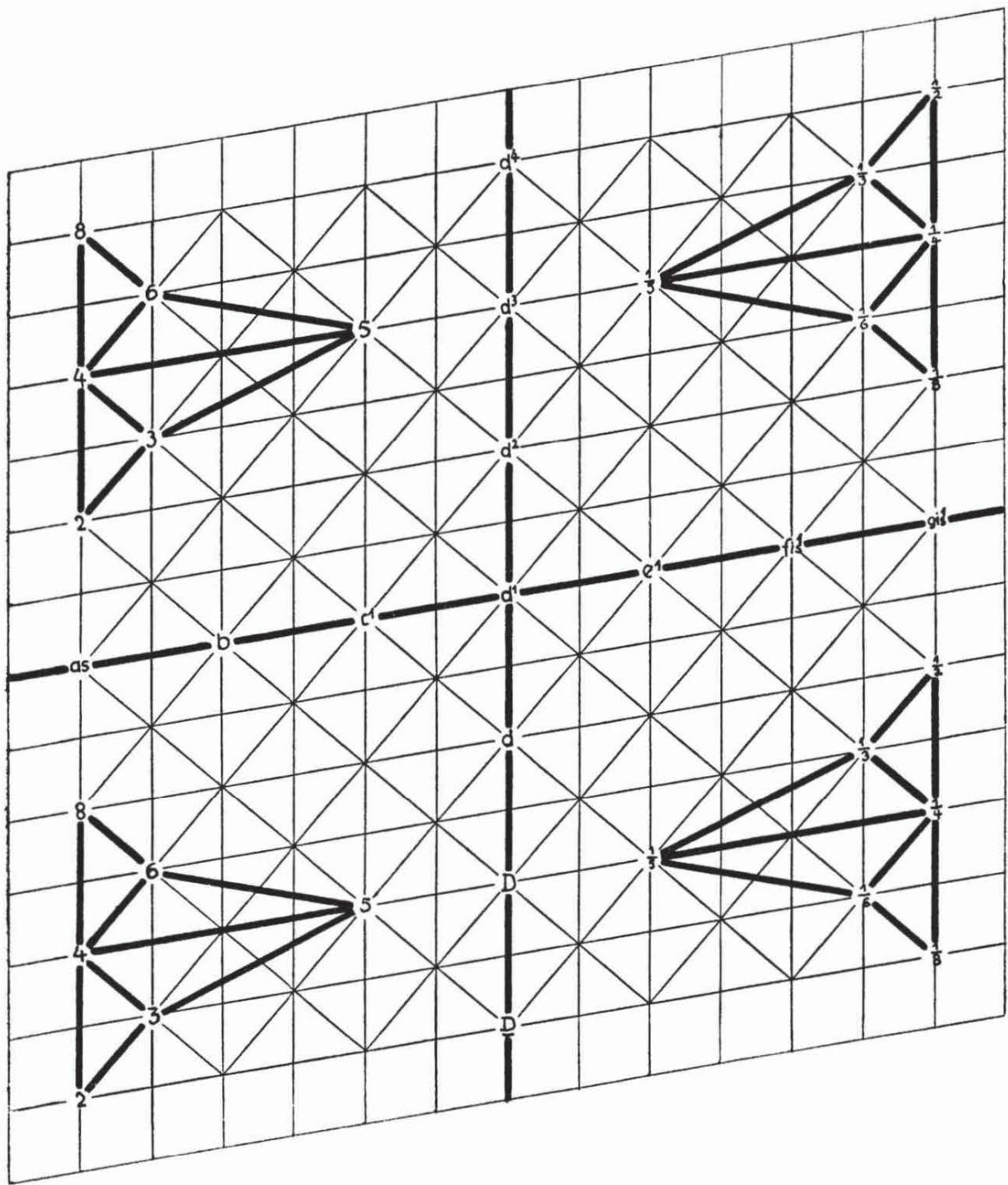


Bild III

Wie steht es nun mit der Wirkung der Spiegelung auf die Reihenfolge der Töne des Sechsklangs? Die Antwort gibt uns das HF. Wir entnehmen ihm, daß der tiefste Ton sich in den höchsten spiegelt und umgekehrt, daß also bei der Spiegelung an der GTA die Richtung (aufwärts und abwärts) der Tonfolge geändert wird.

Die Achsenspiegelung an der Oktavenachse

Spiegeln wir die zweite Gruppe von 6 Tönen an der Oktavenachse (OA) $D-d^4$, dann entsteht rechts oben eine dritte Sechstongruppe. Die an die Stelle der Tonnamen gesetzten Verhältniszahlen der Frequenzen im reinen Tonsystem zeigen,

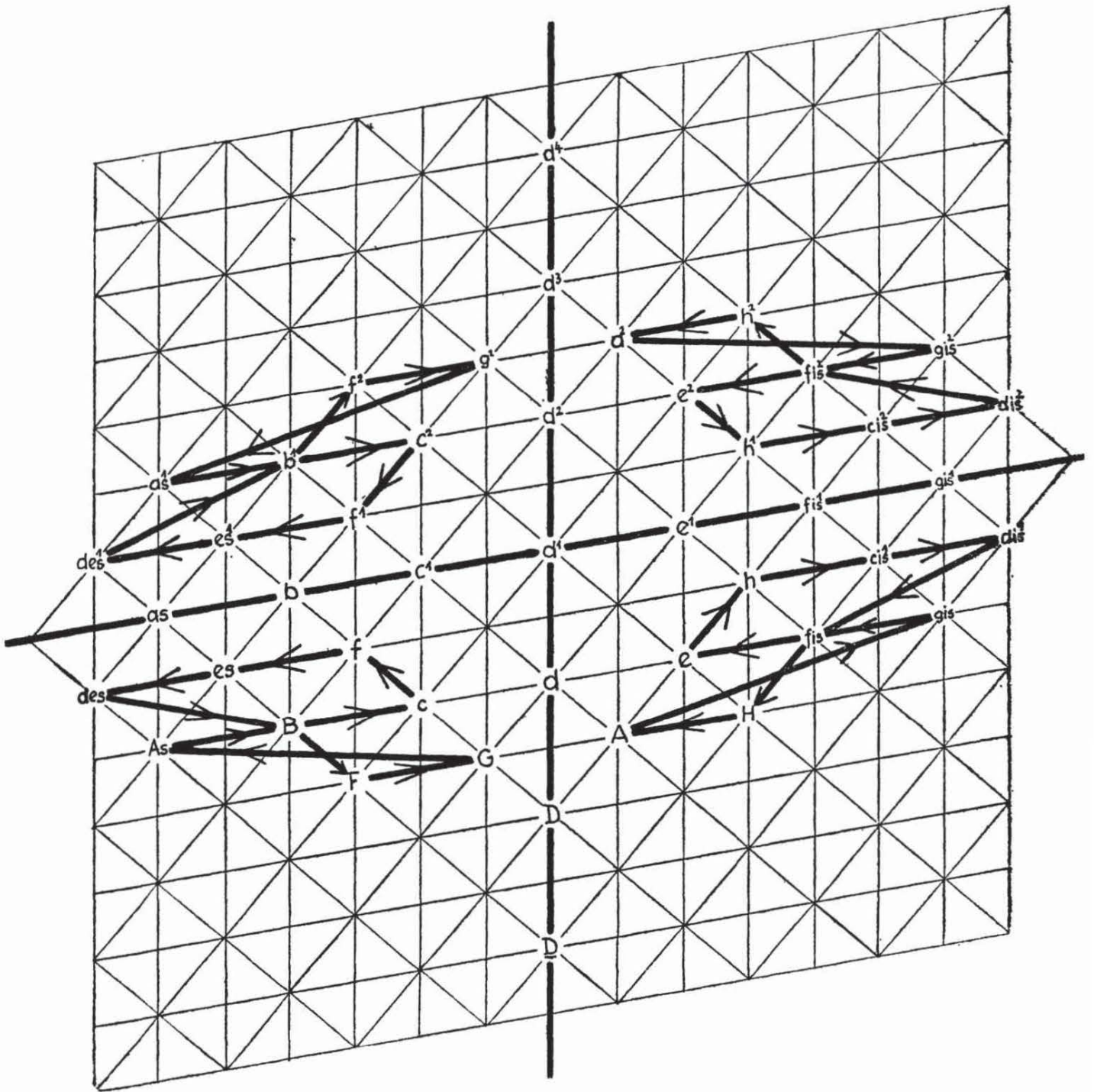


Bild IV

daß die 6 Töne mit den Schwingungszahlenverhältnissen $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8}$ wenn wir die Töne als Klänge auffassen und dann Unterklänge heißen, einen gemeinsamen Oberton 1 haben.

Der Mollklang der 6 ersten musikalischen Unterklänge Diese 6 durch den gemeinsamen Oberton 1 verbundenen Unterklänge bilden einen Mollklang, den wir folgerichtig als den Mollklang der 6 ersten musikalischen Unterklänge bezeichnen müssen.

Den 4. Sechsklang rechts unten können wir auf 3 Arten erhalten, nämlich durch Spiegelung der 3 ersten Sechsklänge an den 2 Achsen und am Achsenschnittpunkt.

Wir haben damit gefunden:

1. Durch die Spiegelungen an einem Ton und an den 2 durch den Ton gehenden Achsen entsteht ein geschlossener Ring von 4 konsonanten Tongruppen.
2. Wenn wir als eine konsonante Tongruppe den Durklang der 6 ersten musikalischen Obertöne nehmen, dann entsteht bei diesen Spiegelungen entweder wieder ein Klang dieser Art oder der Mollklang der 6 ersten musikalischen Untertöne.
3. Die Achsen Spiegelung an einer Oktavenachse verwandelt das Geschlecht, vertauscht also Dur und Moll.
4. Die Achsen Spiegelung an einer Ganztonachse verwandelt die Richtung, vertauscht also aufwärts und abwärts.
5. Die Punkt Spiegelung verwandelt sowohl das Geschlecht als auch die Richtung.

Achsen Spiegelung von Melodien

Bilder II und IV. Verschieben wir jeden Ton der e-moll-Melodie des Bildes II um eine große Sext aufwärts, dann erhalten wir die cis-moll-Melodie des Bildes IV rechts oben. Die Abbildungen der 2 Melodien, der e-moll-Melodie und der cis-moll-Melodie, sind, wegen der Transposition, kongruent. Durch Spiegelung an den durch d¹ gehenden Achsen entsteht aus der cis-moll-Melodie ein Ring von 4 harmonisch verwandten Melodien. Zu dem gleichen Ring von 4 Melodien wären wir gekommen, wenn wir die F-Dur-Melodie des Bildes II um eine große Sext abwärts verschoben hätten.

Es leuchtet ein, daß in der gleichen Weise aus jeder beliebigen Melodie durch Spiegelung an einem beliebigen Oktaven-Ganzton-Achsenkreuz immer ein Ring von 4 harmonisch verwandten Melodien gebildet werden kann.

Bilder III und IV. Die Melodien eines Rings von 4 harmonisch verwandten Melodien können in 6 Melodienpaare geordnet werden, nämlich in

- 2 Paare mit dem Gegensatz Dur / Moll
- 2 Paare mit dem Gegensatz aufwärts / abwärts
- 2 Paare mit dem Gegensatz aufwärts Dur / abwärts Moll

Die harmonische Grundlage einer Melodie

Bild IV. Die cis-moll-Melodie rechts oben setzt sich aus 8 voneinander verschiedenen Tönen zusammen.

Diese bilden im HF einen geschlossenen Tonhaufen, dessen Töne harmonisch in engem Zusammenhang stehen, da aus ihnen die folgenden Dreiklangakkorde gebildet werden können:

a ²		fis ²	cis ²
a ²	e ²		cis ²
	e ²		cis ² gis ²
	e ² h ¹		gis ²
	e ²	h ²	gis ²

h^1		gis^2	dis^2
	h^2	gis^2	dis^2
h^1	fis^2		dis^2
	h^2	fis^2	dis^2

Die 9 unter sich durch gemeinsame Töne verbundenen Dreiklangakkorde ergeben im HF ein Netz von Dreiklangakkorden, das als die harmonische Grundlage unserer Melodie anzusehen ist.

Die harmonische Geschlossenheit des Melodienrings

Bild IV. Jeder der 9 in der cis-moll-Melodie enthaltenen Dreiklangakkorde bildet mit den 3 aus ihm durch Spiegelung hervorgegangenen Dreiklangakkorden zusammen einen Zyklus von 4 Dreiklangakkorden; so ergibt $a^2 e^2 cis^2$ den folgenden Zyklus

	c^2	g^2	a^2	e^2	
es^1					cis^2
	
es					cis^1
	c	G	A	e	

Da jeder der 9 Dreiklangakkorde der cis-moll-Melodie einen solchen Viererzyklus ergibt, so enthält jeder der 4 symmetrischen Tonhaufen ein gleichgebautes Netz von 9 Dreiklangakkorden, welches die harmonische Grundlage der betreffenden Melodie des Melodienrings darstellt. Wir haben es also bei den 4 harmonisch verwandten Melodien des Melodienrings mit Melodien zu tun, bei denen die durch die Töne der Melodien gebildeten Dreiklangakkorde zyklisch vertauscht sind. Daraus folgt aber, daß von den 4 Melodien des Melodienrings harmonisch keine eine Vorzugsstellung innehat und jede gleichwertig neben jeder anderen steht.

Die Invarianz des Harmonischen Feldes gegenüber Spiegelungen

Bild I. Das HF ist punktsymmetrisch in bezug auf jeden beliebigen Ton und achsensymmetrisch in bezug auf jedes beliebige Oktaven-Ganzton-Achsenkreuz. Bei den Spiegelungen werden alle harmonischen Elemente des HF, Dreiklangakkorde und Harmonische Intervall-Reihen, in gleichartige harmonische Elemente, also wieder in Dreiklangakkorde und Harmonische Intervallreihen, verwandelt. Das HF ist also gegenüber allen Punkt- und Achsenspiegelungen harmonisch invariant. Durch diese Invarianz wird das Gleichschwebend temperierte Tonsystem zu einem in sich geschlossenen harmonischen Ganzen, das sich aus den Harmonischen Intervallreihen der Oktave, der Quinte, der Quarte, der Terzen, der Sexten, der Dezime, der Undezime und der Duodezime aufbaut¹.

¹ Die Notenbeispiele und der Text zu den Beispielen 1 und 2 wurden mir in freundlicher Weise von Herrn Kirchenmusikdirektor Hans-Arnold Metzger, Eßlingen am Neckar, zur Verfügung gestellt. Dafür und für viele Anregungen, die ich als Mathematiker vom Musiker gerne angenommen habe, bin ich Herrn Metzger zu großem Danke verpflichtet.